581. D'Amore B. (2006). Conclusiones y perspectivas de investigación futura. In: Radford L., D'Amore B. (eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Numero speciale della rivista *Relime* (Cinvestav, México DF., México). 301-306.

Conclusiones y perspectivas de investigación futura

Bruno D'Amore

No cabe la menor duda, dada la evidencia, que la semiótica, la cual surgió de un género de estudio del todo diverso (ver *Introducción* de Luis Radford en esta misma revista), ha conquistado un lugar importante en los estudios de Didáctica de la Matemática.

En relación con su ingreso en nuestro dominio, la visión semiótica inició solidificando sus diversos aspectos con estudios caracterizados por investigaciones que explicaban el pasaje del concepto a sus representaciones, para después abrir el camino a direcciones entre ellas diversas, como lo demuestra la amplia colección de estudios que en esta revista se presenta.

El desafío es intentar entender en qué dirección se moverá la investigación en el futuro.

Para poder plantear algunas hipótesis en relación con estas direcciones, considero útil un ulterior análisis de la historia reciente y de las mismas bases culturales.

Una problemática importante y todavía central es la que hace referencia a la representación de los objetos matemáticos; en este caso, en nuestra comunidad científica generalmente decimos: "Pasar de un concepto a sus representaciones", pero, ¿Qué es un "concepto"? Esta pregunta era y continúa a ser central. En (D'Amore, 2006, pp. 205-220) intenté plantear las bases para dar respuesta a esta pregunta aparentemente ingenua; pero, lo que invariablemente se llega a constatar, con certeza absoluta, es que la "definición" se revela, por muchos motivos, de una inmensa complejidad…

Una de las dificultades de la definición es la siguiente. En la idea de "concepto" participan muchos factores y muchas causas; para decirlo brevemente −y, por tanto, en modo incompleto− no parece correcto afirmar, por ejemplo, que un concepto matemático es aquel que se halla en la mente de los científicos que a este tema han dedicado su vida de estudio y reflexión; en cambio parece más correcto afirmar que existe una fuerte componente por así decirlo "antropológica".

Por tanto, en la "construcción" de un "concepto" participarían tanto la parte institucional (el Saber) como la parte personal (de quien tiene acceso a dicho Saber, por tanto no sólo los científicos). A este propósito se han manifestado diferentes autores; yo aquí me limito a sugerir el trabajo de Godino y Batanero (1994) dado que en este artículo se da extraordinaria importancia al debate en el cual estoy tratando de inserirme, pues trata precisamente de las relaciones entre significados institucionales y personales de los objetos matemáticos.

Distinguir el "concepto" de su construcción no es fácil y, quizás, no es ni posible ni deseable: un concepto se halla continuamente, por así decirlo, en fase de construcción y en esta misma construcción se halla la parte más problemática y, por lo tanto, más rica de su significado.
Podríamos llamar a tal construcción: *conceptualización*, y cuestionarnos sobre qué es y cómo se da. En el intento de dar luz a este argumento, muchos investigadores han propuesto hipótesis y teorías sobre las cuales no entro en detalle, recomendando, para una rápida recapitulación, la exposición hecha en D'Amore (2006); basta recordar las contribuciones (muchas veces en firme oposición entre ellas) de Vygotski, de Piaget, de Gal'perin, de Bruner, de Gagné,… sólo para limitarme a los más conocidos.
Adentrarse en esta aventura, nos conduce por lo menos a darnos cuenta de un hecho: que la segunda pregunta (*¿Qué es* o *Cómo se llega a la conceptualización*?) es fundamentalmente un misterio…
Los tentativos de respuesta a pregunta pasan a través de un recorrido por los famosos "triángulos" (bibliografía específica en: D'Amore, 2006):

- el triángulo de Charles Sanders Peirce [1839-1914], publicado en 1883: intérprete, representante, objeto;
- el triángulo de Gotlob Frege [1848-1925], publicado en 1892: Sinn [sentido], Zeichen [expresión], Bedeutung [indicación];
- el triángulo de C. K. Ogden e I. A. Richards, que quería ser un compendio de los otros dos, publicado en 1923: referencia, símbolo, referente;
- el triángulo de G. Vergnaud (1990), por el cual un concepto C es la terna (S, I, *S*) donde S es el referente, I el significado y *S* el significante.

Queda explícito el hecho que, de cualquier manera, *apropiarse* de un concepto (independientemente de lo que esto signifique) requiere necesariamente de algo más que *nombrarlo* (la cuestión se originó por lo menos en la Edad Media; ver (D'Amore, 2006) y *representarlo*, lo que nos lleva a la famosa *paradoja* de Duval (Duval, 1993, p. 38).

Kant, en la *Crítica de la razón pura*, postula que el conocimiento es el resultado de un contacto entre un sujeto que aprende y un objeto de conocimiento. Él recurre a una comparación: así como el líquido adopta la forma del recipiente que lo contiene, las impresiones sensoriales adoptan las formas que se le imponen por parte de las estructuras cognitivas. Pero para que eso suceda, y es la bien conocida "hipótesis fuerte" de Kant, se necesitan formas innatas de sensibilidad, como espacio, tiempo, causalidad, permanencia del objeto, permanencia y uso de experiencias precedentes, etc.

Por lo que el conocimiento no es sólo una simple representación de la realidad externa; es en cambio el resultado de la interacción entre el sujeto que aprende (sus estructuras cognitivas) y sus "experiencias sensoriales". Además, el sujeto que aprende abandona la típica pasividad (cartesiana o lockiana) y construye, estructura sus experiencias, participando activamente en el proceso de aprendizaje en una verdadera y propia *construcción*. Se trata de una transformación: un objeto de conocimiento, entrando en contacto con un sujeto que aprende, se transforma, se reconstruye, gracias a los instrumentos cognitivos del sujeto mismo.

Pero: ¿de dónde provienen precisamente esos instrumentos cognitivos que sirven para transformar las experiencias del sujeto? La epistemología del aprendizaje de Kant, para usar una terminología moderna, se refiere a un aprendiz adulto, alguien que ha ya desarrollado un lenguaje, con capacidad de abstracción y de generalización. Es lícito por tanto plantearse la siguiente pregunta: ¿Cómo cambia todo esto si hablamos del aprendizaje en ambiente escolar, de aprendices no adultos (niños o adolescentes o jóvenes) a las primeras armas, con lenguajes aún en elaboración?

No es del todo absurdo pensar que la epistemología constructivista de Piaget de los años '30[1] surgió precisamente por la necesidad de dar respuesta a este problema.

Por lo tanto, el saber adquirido puede verse como el producto de la elaboración de la experiencia con la cual entra en contacto el sujeto que aprende; y esta elaboración consiste en la interacción entre el individuo y su ambiente y en el modo en el cual el individuo interioriza el mundo externo. Independientemente de las peculiaridades de estas "actividades", el sujeto que aprende debe comprometerse en algo que necesariamente lo lleva a simbolizar. Se trata de una necesidad típicamente humana; de una elaboración (con características internas o sociales o incluso ambas) que se organiza alrededor de o en los sistemas semióticos de representación.

Se puede decir más: que el conocimiento "*es*" la intervención y el uso de los signos. Por lo tanto, el mecanismo de producción y de uso, subjetivo e inter-subjetivo, de estos signos y de la representación de los "objetos" de la adquisición conceptual, es crucial para el conocimiento.

Ahora, todo esto había sido ya previsto en el programa de la epistemología constructivista, y enunciada por parte de Piaget & Garcia (1982) en particular en el capitulo IX, cuando, hablando de la experiencia del niño, afirman que las situaciones que él encuentra son generadas por su entorno social y los objetos aparecen situados en contextos que les dan el significado especifico. Por lo

[1] Estoy pensando en Piaget (1937), por ejemplo.

tanto, este niño no asimila objetos puros sino las situaciones en las cuales los objetos tienen roles específicos; a medida que su sistema de comunicación se hace más complejo, la experiencia directa de los objetos queda subordinada al sistema de interpretaciones suministrado por el entorno social.

No hay duda que el conocimiento, en la escuela, y su aprendizaje como construcción, se hallen condicionados por situaciones específicas de la institución. Por lo tanto, el aprendizaje en la escuela ¡no es el aprendizaje *total*!. Los problemas del aprendizaje matemático en la escuela, aún antes de ser de orden epistemológico, pertenecen a este ambiente sociocultural específico.

Aceptando que todo conocimiento (matemático, en particular) refleja al mismo tiempo una dimensión social y una personal, entonces, la escuela no es una excepción, es incluso el lugar donde se institucionaliza esta doble naturaleza.

Durante el aprendizaje de las matemáticas, se introduce a los estudiantes en un mundo nuevo, tanto conceptual como simbólico (sobre todo representativo). Este mundo no es el fruto de una construcción solitaria, sino el fruto de una verdadera y compleja interacción con los miembros de la microsociedad de la cual el sujeto que aprende forma parte: los propios compañeros y los maestros (y la noosfera, a veces borrosa, a veces evidente). Es gracias a un continuo debate social que el sujeto que aprende toma conciencia del conflicto entre "conceptos espontáneos" y "conceptos científicos"; enseñar no consiste sólo en el intento de generalizar, amplificar, volver más crítico el "sentido común" de los estudiantes; se trata de una acción más bien compleja, como nos ha enseñado Vygotski en *Pensamiento y Lenguaje* (1962), cuando afirma que un concepto es algo más que la suma de ciertos vínculos asociativos formados por la memoria, al cual se puede llegar sólo cuando el desarrollo mental del niño ha alcanzado el nivel requerido; pero, el desarrollo de los conceptos presupone el desarrollo de muchas funciones intelectuales (atención, memoria lógica, abstracción, capacidad de comparación y diferenciación), tanto que la experiencia demuestra que la enseñanza directa de los conceptos es imposible y estéril.

En matemática, de manera específica, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas (Chevallard, 1991; Duval, 1993, 1999; Godino y Batanero, 1994), lo que nos obliga a aceptar la afirmación hecha por Husserl pero impuesta a la atención de nuestra comunidad por Duval, que no existe noética sin semiótica.

Como sugiere Duval, la construcción de los conceptos matemáticos depende, estrechamente, de la capacidad de usar *más* registros de representaciones semióticas de esos conceptos:

- de *representarlos* en un registro dado;
- de *tratar* tales representaciones en un mismo registro;

- de *convertir* tales representaciones de un registro dado a otro.

El conjunto de estos tres elementos y las consideraciones de los párrafos, precedentes evidencian la profunda relación que existe entre noética y constructivismo: "construcción del conocimiento en matemáticas" se puede pensar precisamente como la unión de esas tres "acciones" sobre los conceptos; es decir, la expresión misma de la capacidad de *representar* los conceptos, de *tratar* las representaciones obtenidas en un registro establecido y de *convertir* las representaciones de un registro en otro.

Todo esto constituye, según mi opinión, sólo el punto de partida para especificar y explicar históricamente la gran importancia que nuestra comunidad de investigación reconoció a los estudios sobre la semiótica, en el momento en el cual ingresaron en nuestro campo. Hoy se prefiere seguir una vía de carácter no nominalista, que podríamos llamar de pensamiento entendido como praxis reflexiva sensorial-intelectual, apoyada en sistemas semióticos de significado cultural. Según esta línea, trazada por Luis Radford, estos sistemas semióticos, construidos socialmente por los individuos a partir de su realidad concreta, transformados activamente de generación en generación, "naturalizan" la realidad de los individuos, enmarcan lo que se entiende por evidencia, argumentos convincentes, demostraciones, etc. y subtienden las reflexiones que los individuos hacen de su mundo.

Pero, volvamos a la pregunta inicial. ¿Qué dirección tomarán estos estudios en el futuro? Podemos ver ya importantes señales, que emergen en las páginas que aquí quisimos recoger. Quizás una gran influencia tendrán particularmente los estudios sobre la comunicación, sobre las acciones de las comunidades de práctica, las reflexiones sobre la dimensión ontogenética, así como la contribución de análisis críticos de temas que han fundado nuestra disciplina y que ya se delinean como evoluciones de un futuro próximo.

En este número especial de la revista *Relime*, reunimos a varios especialistas con el fin de presentar el estado del arte de las diversas tendencias que conforman, actualmente, el estudio de la semiótica en nuestro sector. Algunos de estos trabajos contribuyen a dar una respuesta adecuada a muchas de las preguntas precedentes.

Responder a la primera pregunta "¿Qué es un concepto?", plantea problemas teóricos; seguir profundizando en esta problemática parece ser un campo en el cual la semiótica puede dar importantes resultados en un futuro cercano. Varios textos aquí reunidos sugieren que las respuestas a esta pregunta y a las que planteé en el curso de este problemático y conclusivo artículo, deben incluir el aspecto institucional (Godino y colaboradores) pero también el contexto cultural (Radford; Cantoral y colaboradores) y cognitivo (Arzarello, Radford; Duval; Otte, Arzarello).

Es así como, Godino y sus colaboradores presentan una actividad concreta del EOS, en el análisis de textos escolares, en el cual utilizan los criterios de idoneidad tanto *epistémica* como *cognitiva*; un análisis de este tipo puede tener repercusiones profundas de carácter institucional;
Cantoral y colaboradores presentan la socio-epistemología, mediante la cual la actividad matemática se sitúa en un contexto cultural de práctica social;
Radford basa su aporte en la idea de *praxis reflexiva* y presenta una teoría cultural de la objetivación; una propuesta de este tipo tiene una doble valencia: cultural (de análisis crítico de posiciones en algunos casos ampliamente compartidas) y cognitiva;
Duval insiste en la importancia del análisis semiótico complejo en el ámbito matemático y cognitivo; él vuelve a los orígenes de la semiótica con el fin de sugerir motivaciones para el análisis de los signos, de la relación de semejanza, de referencia, de causalidad, de oposición; esta modalidad de afrontar la problemática es útil tanto para el desarrollo de la matemática como para el análisis de su aprendizaje;
Otte propone que la explicación es consubstancial de la exhibición de signos y sentido, pues no hay –a pesar de lo que sostiene el idealismo filosófico y el mentalismo cognitivista– diferencia entre idea y símbolo, y esto lo hace abordando el tema de la demostración en matemática.
Arzarello presenta en primer lugar un análisis crítico e histórico de la idea misma de semiótica, iniciando desde su fundamentación teórica y proponiendo diversas interpretaciones, para pasar después a la semiótica como aproximación modal, ofreciendo también análisis de eventos sucedidos en el aula.

La semiótica que nos interesa, de manera específica, está relacionada con la utilización de signos y con el desarrollo conceptual en el salón de clase. Muchos de los artículos aquí reunidos se centran en este aspecto (Koukkoufis y Williams; Sáenz-Ludlow; Gagatsis y colaboradores; Bagni; D’Amore).
De hecho, Koukkoufis y Williams usan la teoría de la objetivación para estudiar la manera en que jóvenes alumnos generalizan;
Adalira Sáenz-Ludlow centra la atención, fuertemente teórica, en una idea muy concreta, la de “riqueza matemática del alumno”, y en la influencia de los maestros en el discurso matemático;
Gagatsis y colaboradores presentan estudios críticos sobre los cambios de representación de objetos relacionados con el concepto de función;
Bagni presenta un estudio experimental hecho con alumnos de secundaria que intentan dar sentido a frases paradójicas;
D’Amore propone un ejemplo de aula en el cual se presenta un cambio de sentido frente a diferentes representaciones del mismo objeto, representaciones obtenidas por tratamiento semiótico;

Este número especial de *Relime* se inspira en colectivas discusiones precedentes, las mencionadas por Luis Radford en su *Introducción*, que yo no repito, y sólo quiere ser una modesta contribución analítica y problemática al tema de la semiótica, en el ámbito de la Educación Matemática.
Me agrego a los agradecimientos de Luis, extendiéndolos a nuestros autores y a todos los lectores.

Bibliografía

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio. [I ed. en italiano 1999, Bologna: Pitagora].

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg, *5*, 37-65.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle. [Ed. en francés 1995, Berne: Peter Lang].

Godino, J.D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *3*, 325-355.

Piaget, J. (1937). *La construction du réel chez l'enfant.* Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. & Garcia, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. París: Flammarion.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*, 133-169.

Vygotsky, L. (1962). *Thought and Language*. Cambridge: MIT Press.

Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla